ESERCIZI

Discussione equazioni goniometriche parametriche

EQUAZIONI GONIOMETRICHE PARAMETRICHE DI 1° GRADO

Se in una equazione che dipende da un parametro k fissiamo un intervallo a cui devono appartenere le soluzioni, il numero di soluzioni varia al variare di k.

Utilizziamo il **metodo grafico** in alcuni esempi di discussione di equazioni parametriche goniometriche, ossia della ricerca di tale numero di soluzioni. Distinguiamo tre casi.

■ Un'equazione goniometrica parametrica è un'equazione goniometrica che dipende da un parametro reale k.

ESERCIZIO

Discutiamo:

$$\begin{cases} k \operatorname{sen} x - 2k + 1 = 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Dividiamo per $k \neq 0$ e isoliamo $\operatorname{sen} x$:

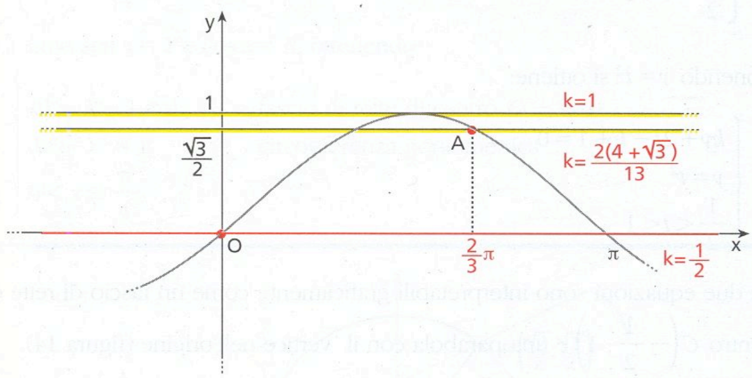
$$\operatorname{sen} x = \frac{2k-1}{k}.$$

■ Supponiamo $k \neq 0$ in quanto per $k = 0$ l'equazione diventa: $0 \cdot \operatorname{sen} x - 2 \cdot 0 + 1 = 0$, $1 = 0$, impossibile.

Poniamo uguali a y i membri dell'uguaglianza:

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = \frac{2k-1}{k} \end{cases}$$

Graficamente le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti di intersezione fra la sinusoide e il fascio di rette parallele all'asse x, rappresentato dalla seconda equazione, nell'intervallo $\left[0; \frac{2}{3}\pi\right]$ (figura 13).



◀ **Figura 13.** Gli intervalli in cui si hanno soluzioni hanno per estremi i valori 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e 1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ è $\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi$.

Determiniamo i valori di k corrispondenti ai valori di y estremi degli intervalli da considerare:

retta per $O \rightarrow y = 0 \quad \rightarrow \frac{2k-1}{k} = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2}$;

retta per $A \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \frac{2k-1}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 4k - 2 = \sqrt{3}k \rightarrow$

$\rightarrow k = \frac{2}{4-\sqrt{3}} \rightarrow k = \frac{2(4+\sqrt{3})}{13}$;

retta tangente $\rightarrow y = 1 \quad \rightarrow \frac{2k-1}{k} = 1 \rightarrow k = 1$.

L'equazione ha:

una soluzione per $\frac{1}{2} \leq k < \frac{2(4+\sqrt{3})}{13}$;

due soluzioni per $\frac{2(4+\sqrt{3})}{13} \leq k \leq 1$.

ESERCIZIO

1 Discutere l'equazione $2\,sen\,x - 3 + k = 0$, $k \in R$, con le limitazioni $30° < x \leq 120°$.

L'equazione data può essere scritta nella forma $sen\,x = \dfrac{3-k}{2}$ ed è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} y = sen\,x \\ y = \dfrac{3-k}{2}. \end{cases}$$

Nel piano riferito a un sistema di assi cartesiani xOy la prima equazione del sistema rappresnta la sinusoide mentre la seconda equazione rappresenta un fascio di rette parallele all'asse x. Tenendo conto delle limitazioni, che espresse in radianti diventano (*)

$$\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{2}{3}\pi,$$

e osservando la figura 1, si tratterà di stabilire per quali valori di k le rette del fascio intersecano l'arco $\widehat{AB}$ di sinusoide, A escluso e B compreso, dove è $A\left(\dfrac{\pi}{6}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ e $B\left(\dfrac{2}{3}\pi\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Le rette notevoli del fascio sono la retta r passante per A, la retta s passante per B e la tangente t alla sinusoide; esse hanno rispettivamente per equazione $y = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = 1$.

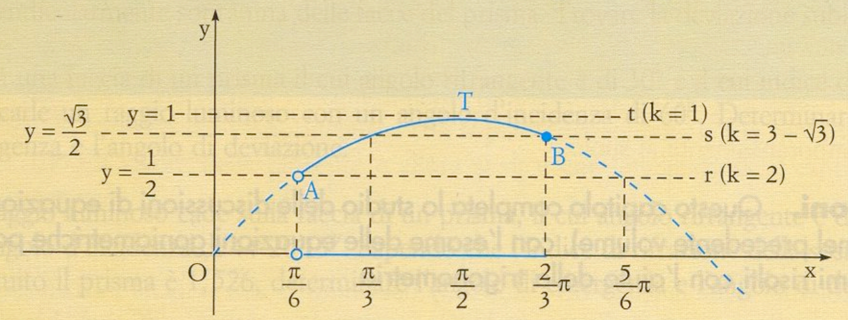


Figura 1

Avremo perciò:

per la retta $r \quad \longrightarrow \quad \dfrac{3-k}{2} = \dfrac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad k = 2$

per la retta $s \quad \longrightarrow \quad \dfrac{3-k}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \longrightarrow \quad k = 3 - \sqrt{3}$

per la retta $t \quad \longrightarrow \quad \dfrac{3-k}{2} = 1 \quad \longrightarrow \quad k = 1.$

Osserviamo la figura 1: risulta evidente che per valori di k a cui corrispondono rette del fascio interne alla striscia delimitata da r e da s, cioè per $3 - \sqrt{3} < k < 2$, l'equazione data ha una soluzione accettabile $\left(\dfrac{\pi}{6} < x_1 < \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{2}{3}\pi\right)$; per valori di k a cui corrispondono, invece, rette interne alla striscia delimitata da s e da t, cioè per $1 < k < 3 - \sqrt{3}$, l'equazione data ha due soluzioni accettabili, tra loro supplementari $\left(\dfrac{\pi}{3} < x_1 < \dfrac{\pi}{2} < x_2 = \pi - x_1 < \dfrac{2}{3}\pi\right)$.

Sempre dalla figura 1 si nota che per $k = 2$ non vi sono soluzioni accettabili rispetto alle limitazioni assegnate, mentre per $k = 3 - \sqrt{3}$ vi sono due soluzioni accettabili $\left(x_1 = \dfrac{\pi}{3}\right.$ e $\left.x_2 = \pi - x_1 = \dfrac{2}{3}\pi\right)$. Si può facilmente verificare che per $k = 3 - \sqrt{3}$ l'equazione data diventa $sen\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, le cui soluzioni, soddisfacenti le limitazioni poste, sono proprio $x = \dfrac{\pi}{3}$ e $x = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$.

Per $k = 1$ le due soluzioni sono coincidenti perché la retta del fascio risulta tangente alla sinusoide nel punto T di ascissa $\frac{\pi}{2}$: si può anche dire che la soluzione $x = \frac{\pi}{2}$ è *soluzione doppia*.
Si può verificare che per $k = 1$ l'equazione proposta diventa $sen\ x = 1$ che ha per soluzioni accettabili i due valori coincidenti $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Dopo aver osservato che per $k < 1$ e per $k > 2$ non vi sono soluzioni per l'equazione o, se ve ne sono, esse non sono accettabili perché non soddisfano le condizioni richieste, possiamo concludere che l'equazione data, con le limitazioni poste, ha

due soluzioni per $1 \leq k \leq 3 - \sqrt{3}$; una soluzione per $3 - \sqrt{3} < k < 2$.

Osservazione. Alle stesse conclusioni si poteva giungere considerando la circonferenza goniometrica (fig. 2) e osservando che

per $\frac{1}{2} < sen\ x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, vi è un solo valore di x compreso nei limiti indicati e precisamente, se espresso in gradi, è $30° < x < 90° < 120°$;

per $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq sen\ x \leq 1$ vi sono due valori di x per i quali è $30° < x \leq 120°$;

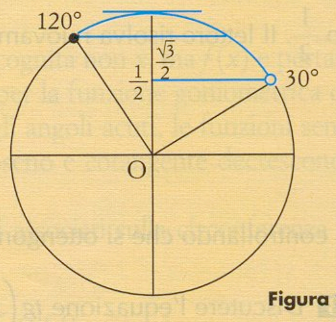


Figura 2

quindi, essendo $sen\ x = \frac{3-k}{2}$, si avrà che

per $\frac{1}{2} < \frac{3-k}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow 3 - \sqrt{3} < k < 2$, una soluzione

per $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{3-k}{2} \leq 1 \longrightarrow 1 \leq k \leq 3 - \sqrt{3}$, due soluzioni.

ESERCIZIO

2 Discutere l'equazione $k\ cos\ 2x + 2 - 5k = 0$ con le condizioni $15° < x < 45°$.

Dopo aver osservato che per $k = 0$ l'equazione proposta è impossibile, scriviamo tale equazione nella forma

$$cos\ 2x = \frac{5k-2}{k}. \qquad (2)$$

Poniamo ora $2x = t$; allora la (2) è equivalente al sistema $\begin{cases} y = cos\ t \\ y = \frac{5k-2}{k} \end{cases}$

e le limitazioni diventano

$15° < x < 45° \longrightarrow 30° < 2x < 90° \longrightarrow$

$\longrightarrow 30° < t < 90°$

o anche, in radianti,

$$\frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{2}.$$

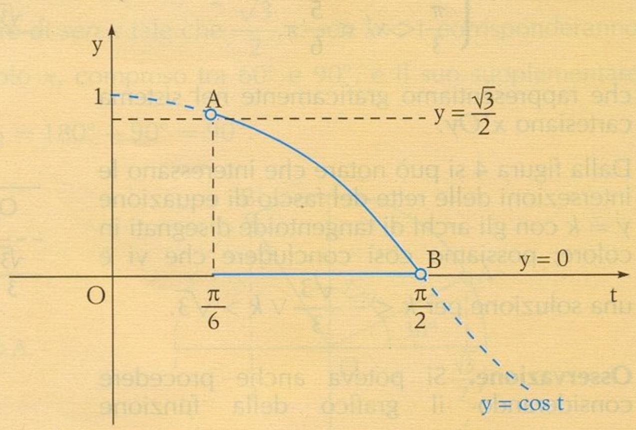


Figura 3

A causa delle limitazioni per l'angolo t, interessano le intersezioni dell'arco $\widehat{AB}$ di cosinusoide (disegnata nel piano tOy), estremi esclusi, (fig. 3), con le rette, parallele all'asse t, di equazione $y = \frac{5k-2}{k}$.

Dall'esame della figura 3 è evidente che vi è una *soluzione* accettabile per

$$0 < \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \dfrac{5k-2}{k} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}.$$

Si poteva ottenere lo stesso risultato considerando, nella circonferenza goniometrica, la variazione della funzione *cos t* nell'intervallo $30° < t < 90°$.

Osservazione. Si noti che questo esempio poteva essere svolto senza utilizzare la sostituzione $2x = t$, ma considerando il grafico della funzione $y = \cos 2x$ che si ottiene dal grafico di $y = \cos x$ sottoponendo i punti di quest'ultimo grafico a una dilatazione orizzontale di rapporto $\frac{1}{2}$. Il lettore risolva nuovamente l'esempio 2 considerando il sistema misto

$$\begin{cases} y = \cos 2x \\ y = \dfrac{5k-2}{k} \\ 15° < x < 45° \end{cases}$$

e controllando che si ottengono i risultati precedentemente già trovati.

ESERCIZIO

3 Discutere l'equazione $tg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = k$, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ponendo $x + \frac{\pi}{3} = x'$ si ottiene l'equazione $y = tg\ x'$ con le limitazioni

$$0 + \frac{\pi}{3} < x' < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad \longrightarrow \quad \frac{\pi}{3} < x' < \frac{5}{6}\pi.$$

Si tratta perciò di discutere il seguente sistema misto

$$\begin{cases} y = tg\ x' \\ y = k \\ \dfrac{\pi}{3} < x' < \dfrac{5}{6}\pi, \end{cases}$$

che rappresentiamo graficamente nel sistema cartesiano $x'Oy$.

Dalla figura 4 si può notare che interessano le intersezioni delle rette del fascio di equazione $y = k$ con gli archi di tangentoide disegnati in colore; possiamo così concludere che vi è una soluzione per $k < -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee k > \sqrt{3}$.

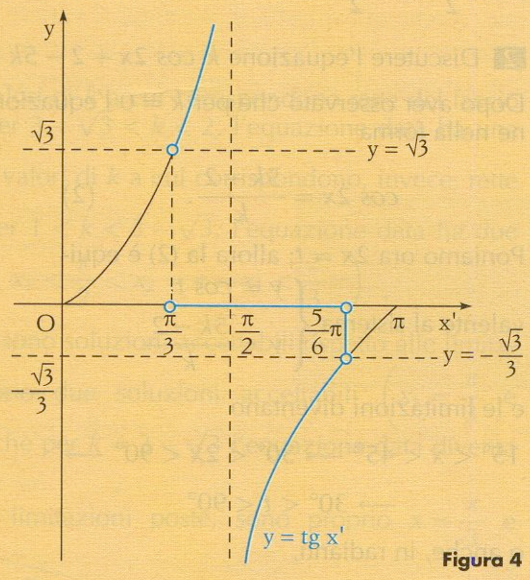


Figura 4

Osservazione. Si poteva anche procedere considerando il grafico della funzione $y = tg\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ e le sue intersezioni, di ascissa compresa tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, con la retta $y = k$. Il grafico di tale funzione si può ottenere da quello della funzione $y = tg\ x$ traslandolo orizzontalmente di $\frac{\pi}{3}$ verso sinistra, cioè applicandogli una traslazione di vettore $\vec{v} = \left(-\frac{\pi}{3}\ ;\ 0\right)$.

EQUAZIONI GONIOMETRICHE PARAMETRICHE DI 2° GRADO

ESERCIZIO

Discutiamo:

$$\begin{cases} k\cos^2 x + 2\cos x - k + 1 = 0 \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Poniamo $\cos x = t$. Di conseguenza:

se $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$, allora $\dfrac{1}{2} < t < 1$.

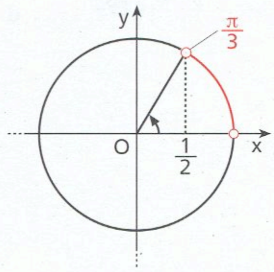
Il sistema diventa:

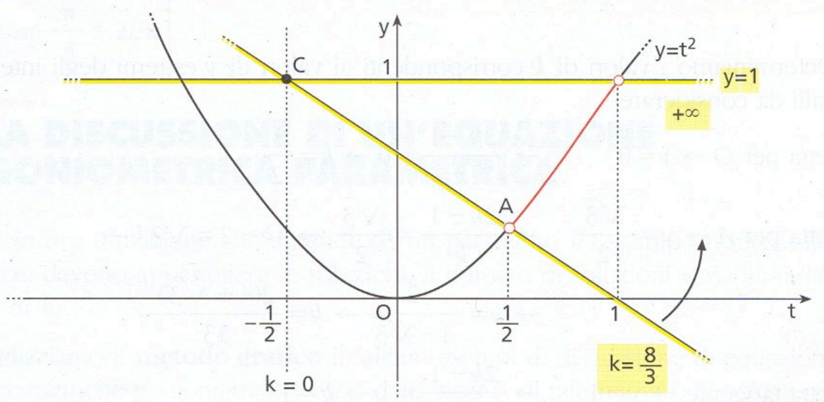
$$\begin{cases} kt^2 + 2t - k + 1 = 0 \\ \dfrac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

Ponendo $y = t^2$ si ottiene:

$$\begin{cases} ky + 2t - k + 1 = 0 \\ y = t^2 \\ \dfrac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

Le due equazioni sono interpretabili graficamente come un fascio di rette di centro $C\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$ e una parabola con il vertice nell'origine (figura 14).





▶ **Figura 14.** Nel fascio, procedendo in senso antiorario dalla retta:

$t = -\dfrac{1}{2}$,

corrispondente a $k = 0$, si hanno valori di k crescenti tendenti a $+\infty$ per rette tendenti a $y = 1$.

Per determinare il valore di k corrispondente a $t = \dfrac{1}{2}$, troviamo l'ordinata di A mediante l'equazione della parabola:

$$y_A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

e sostituiamo le coordinate di $A\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$ nell'equazione del fascio:

$$\frac{1}{4}k + 1 - k + 1 = 0 \to k - 4k + 8 = 0 \to k = \frac{8}{3}.$$

Dal grafico ricaviamo che l'equazione ha:

una soluzione per $k > \dfrac{8}{3}$.

ESERCIZIO

1 Discutere l'equazione

$$(k+3)\ sen^2 x - 2\ sen\ x + k - 3 = 0, \quad k \in R$$

con le condizioni $0° \leq x \leq 90°$.
Poniamo

$$sen\ x = t;$$

si ha $0° \leq x \leq 90° \longrightarrow 0 \leq sen\ x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq t \leq 1$ e discutiamo pertanto il seguente sistema misto

$$\begin{cases} (k+3)t^2 - 2t + k - 3 = 0 \\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases} \qquad (1)$$

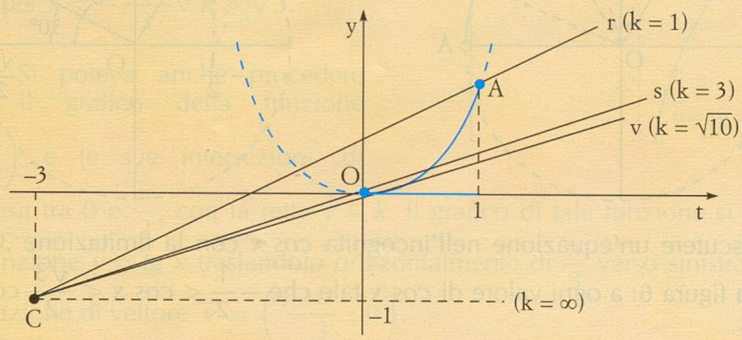


Figura 9

Ricorriamo al metodo della parabola fissa (volume precedente, cap. 14, n. 8), ponendo, nell'equazione (1), $t^2 = y$.
Disegnati nel piano tOy (fig. 9) la parabola $y = t^2$ e le rette notevoli del fascio di equazione $2t - (k+3)y + 3 - k = 0$, di centro $C(-3\ ;\ -1)$, si procede come si è appreso a suo tempo; lasciamo la discussione al lettore che potrà così concludere che l'equazione data ammette

una soluzione per $1 \leq k < 3$; due soluzioni per $3 \leq k \leq \sqrt{10}$.

ESERCIZIO

2 Discutere l'equazione

$$4\ sen^2 x - 4\ sen\ x + 5 - 4k = 0 \quad k \in R \qquad (2)$$

con le condizioni $60° \leq x \leq 150°$.

Dall'esame della figura 10 si vede che, quando è $\frac{1}{2} \leq sen\ x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, a ogni valore di $sen\ x$ corrisponde un valore accettabile di x compreso nell'intervallo $(120°\ ;\ 150°]$, invece a ogni valore di $sen\ x$ tale che $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq sen\ x \leq 1$ corrispondono due valori accettabili di x, supplementari tra loro, compresi tra 60° e 120°, estremi inclusi.

Per la discussione seguiamo, questa volta, il metodo grafico del *parametro isolato*. Poniamo $sen\ x = y$; la (2) può scriversi quindi nella forma $4y^2 - 4y = 4k - 5$ e può considerarsi l'equazione risolvente il sistema

$$\begin{cases} z = 4y^2 - 4y & (3) \\ z = 4k - 5, & (4) \end{cases}$$

che traduce il problema di ricercare nel piano yOz le intersezioni tra la parabola, di vertice $(1/2\ ;\ -1)$ e con asse parallelo all'asse z (fig. 11), e le rette parallele all'asse y di equazione (4).

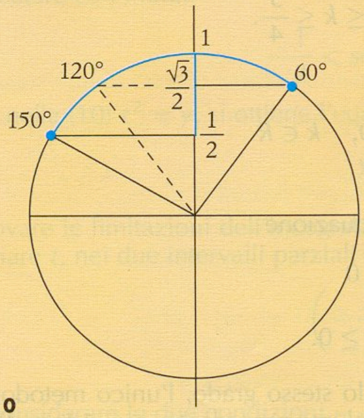


Figura 10

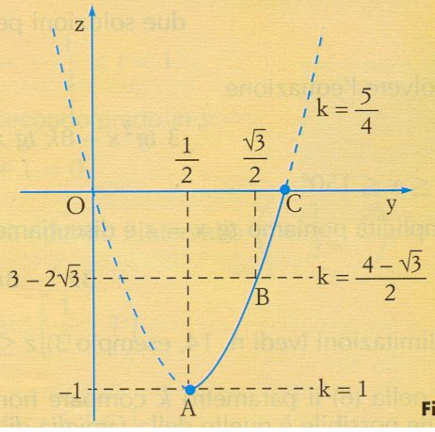


Figura 11

Per le limitazioni prima poste, le intersezioni devono cadere nell'arco $\widehat{AB}$ o nell'arco $\widehat{BC}$; dall'esame della figura 11 si vede che, per un determinato valore di k, le rette (4) avranno al massimo una sola intersezione accettabile con la parabola. Si dovranno così ricercare i valori di k per i quali è

$\frac{1}{2} \leq y < \frac{\sqrt{3}}{2}$ a cui corrisponderà (per ciò che prima è stato dedotto dall'esame della figura 10) una sola soluzione per x $(120° < x \leq 150°)$, oppure

$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq 1$ a cui corrisponderanno due soluzioni per x $(60° \leq x < 180° - x \leq 120°)$.

Dalla (3) si ricava che è

$$A\left(\frac{1}{2}\,;-1\right); \quad B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;3-2\sqrt{3}\right); \quad C(1\,;0).$$

Dalla figura 11 si deduce che è $\frac{1}{2} \leq y < \frac{\sqrt{3}}{2}$ per

$$-1 \leq z < 3-2\sqrt{3} \longrightarrow \begin{cases} 4k-5 \geq -1 \\ 4k-5 < 3-2\sqrt{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k \geq 1 \\ k < \dfrac{4-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \longrightarrow 1 \leq k < \frac{4-\sqrt{3}}{2}$$

e che è $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq 1$ per

$$3-2\sqrt{3} \leq z \leq 0 \longrightarrow \begin{cases} 4k-5 \geq 3-2\sqrt{3} \\ 4k-5 \leq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k \geq \dfrac{4-\sqrt{3}}{2} \\ k \leq \dfrac{5}{4} \end{cases} \longrightarrow \frac{4-\sqrt{3}}{2} \leq k \leq \frac{5}{4}.$$

Quindi, per quanto osservato all'inizio dell'esercizio, potremo così concludere

per $1 \leq k < \frac{4-\sqrt{3}}{2}$, risultando $\frac{1}{2} \leq sen\ x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, è $60° < 120° < x \leq 150°$.

Per $\frac{4-\sqrt{3}}{2} \leq k \leq \frac{5}{4}$, risultando $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq sen\ x \leq 1$, è

$$60° \leq x_1 \leq x_2 = 180° - x_1 \leq 120° < 150°.$$

Riassumendo, l'equazione data ha

una soluzione per $1 \leq k < \frac{4-\sqrt{3}}{2}$

due soluzioni per $\frac{4-\sqrt{3}}{2} \leq k \leq \frac{5}{4}$.

ESERCIZIO

3 Risolvere l'equazione

$$3\ tg^2 x - 8k\ tg\ x - 3k^2 = 0, \quad k \in R \tag{5}$$

con $0° \leq x \leq 150°$.

Per semplicità poniamo $tg\ x = z$ e discutiamo quindi l'equazione

$$3z^2 - 8kz - 3k^2 = 0 \tag{6}$$

con le limitazioni (vedi n. 14, esempio 3) $z \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \vee z \geq 0$.

Poiché nella (6) il parametro k compare non sempre allo stesso grado, l'unico metodo di discussione possibile è quello della *famiglia di parabole* (volume precedente, cap. 14, n. 4). Lasciamo al lettore il compito di effettuare la discussione e di verificare che, rispetto alle limitazioni poste, la (5) ammette

una soluzione per $-\frac{\sqrt{3}}{9} < k < 0 \quad \vee \quad 0 < k < \sqrt{3}$

due soluzioni per $k \leq -\frac{\sqrt{3}}{9} \quad \vee \quad k \geq \sqrt{3} \quad \vee \quad k = 0.$

ESERCIZIO

4 Discutere l'equazione

$$2 \ sen \ x \ cos \ x + 1 - k \ cos^2 x = 0, \quad k \in R$$

con le limitazioni $0° < x < 90°$.
Dopo aver posto $1 = cos^2 x + sen^2 x$, l'equazione proposta si può facilmente ricondurre a un'equazione omogenea di 2° grado nelle incognite $sen \ x$ e $cos \ x$:

$$sen^2 x + 2 \ sen \ x \ cos \ x + (1 - k) cos^2 x = 0.$$

Poiché nell'intervallo aperto $(0° \ ; \ 90°)$ è $cos \ x \neq 0$, possiamo dividere entrambi i membri dell'ultima equazione scritta per $cos^2 x$ e ottenere così l'equazione equivalente di 2° grado in $tg \ x$

$$tg^2 x + 2 \ tg \ x + 1 - k = 0. \tag{7}$$

Poiché nell'intervallo $(0° \ ; \ 90°)$ vi è corrispondenza biunivoca tra l'angolo e il valore della sua tangente goniometrica e poiché, per le limitazioni poste, deve essere

$$tg \ x > 0, \tag{8}$$

basterà discutere la (7) con la limitazione (8). Applicando il metodo di Cartesio (volume precedente, cap. 14, n. 3), il lettore può verificare che l'equazione data, rispetto ai limiti assegnati, ammette

una soluzione per $k > 1$.

EQUAZIONI GONIOMETRICHE PARAMETRICHE LINEARI

ESERCIZIO

Discutiamo:

$$\begin{cases} k\,\mathrm{sen}\,x - \cos x - 1 = 0 \\ 0 < x \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Poniamo $\mathrm{sen}\,x = Y$ e $\cos x = X$, ottenendo:

$$\begin{cases} kY - X - 1 = 0 & \text{fascio di rette di centro } C(-1;\,0) \\ X^2 + Y^2 = 1 & \text{circonferenza goniometrica} \\ 0 < x \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

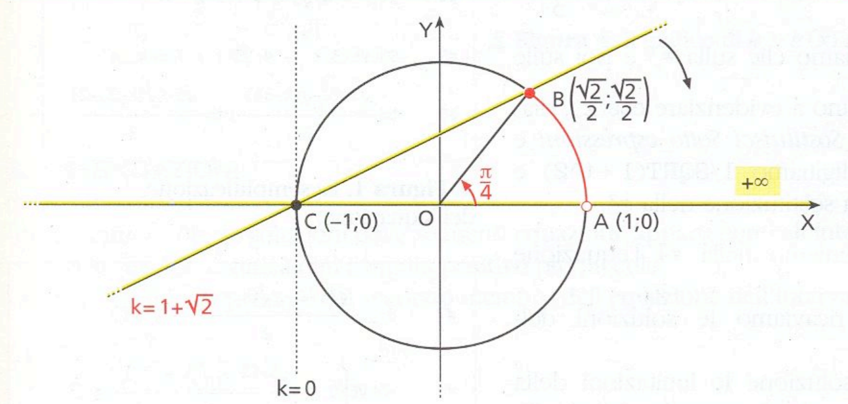


Figura 15. I valori di k tendono a $+\infty$ procedendo in senso orario dalla retta $X = -1$, corrispondente a $k = 0$, verso la retta $Y = 0$.

Determiniamo il valore di k corrispondente alla retta passante per $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$k\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2}k = \sqrt{2} + 2 \rightarrow k = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

L'equazione ha:

una soluzione per $k \geq 1 + \sqrt{2}$.

ESERCIZIO

1 Discutere l'equazione

$$sen\ x + 2\ cos\ x = k, \quad k \in R \tag{1}$$

con le limitazioni

$$0° \leq x \leq 60°. \tag{2}$$

Per discutere l'equazione (1), che è lineare in seno e coseno di x, ricorriamo al seguente *metodo grafico* che diremo **metodo della circonferenza goniometrica.** Associamo alla (1) l'identità fondamentale della goniometria $cos^2 x + sen^2 x = 1$ e, per comodità, poniamo $cos\ x = X$ e $sen\ x = Y$.

Dovremo pertanto considerare il sistema

$$\begin{cases} Y + 2X = k \\ X^2 + Y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{con} \quad 0° \leq x \leq 60°\ (*).$$

Procediamo graficamente e consideriamo quindi un sistema di riferimento XOY (fig. 12); si tratterà di determinare le intersezioni della circonferenza, con centro nell'origine e raggio unitario, di equazione

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

con il fascio di rette parallele, di equazione

$$Y = -2X + k.$$

Se indichiamo con B il punto associato all'angolo di 60° sulla circonferenza goniometrica, si può notare che, ai fini della discussione, interessano le intersezioni delle rette del fascio con l'arco $\widehat{AB}$, i cui estremi sono i punti $A(1\ ;\ 0)$ e $B\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Le rette notevoli del fascio sono quindi la retta r passante per B, la retta s passante per A e la tangente t all'arco $\widehat{AB}$ nel punto T

retta $r \quad \longrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2} + k \quad \longrightarrow \quad k = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$

retta $s \quad \longrightarrow \quad 0 = -2 + k \quad \longrightarrow \quad k = 2.$

Per determinare il valore di k corrispondente alla retta tangente t, imponiamo che la distanza dal centro $O(0\ ;\ 0)$ della generica retta del fascio, di equazione $2X + Y - k = 0$, sia 1; tenendo poi conto che le coordinate di T sono entrambe positive avremo $k > 0$, essendo $k = 2X + Y$.
Per t dovrà quindi essere

$$\frac{|-k|}{\sqrt{5}} = 1 \quad \longrightarrow \quad k = \pm\sqrt{5} \quad \longrightarrow \quad k = \sqrt{5}.$$

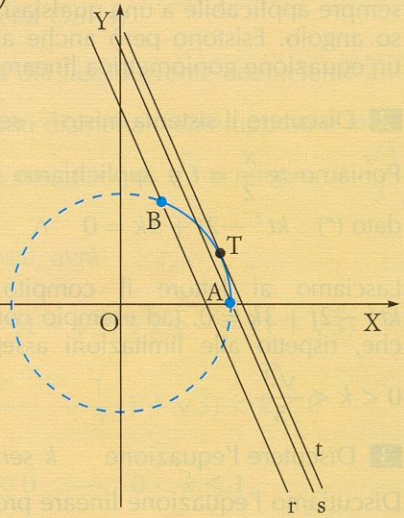


Figura 12

Dall'esame della figura 12 e dai calcoli sviluppati possiamo concludere quanto segue:

- per $k < \frac{\sqrt{3}+2}{2}$: le rette del fascio o non incontrano la circonferenza (per $k < -\sqrt{5}$) o la incontrano in punti esterni all'arco $\widehat{AB}$; l'equazione non ha perciò soluzioni o, se le ammette, non soddisfano le limitazioni (2);
- per $k = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$: la retta del fascio è la retta r che interseca la circonferenza nel punto B, corrispondente alla soluzione limite accettabile $x = 60°$, e in un ulteriore punto esterno all'arco $\widehat{AB}$: vi è pertanto una sola soluzione accettabile limite;
- per $\frac{\sqrt{3}+2}{2} < k < 2$: solo una delle due intersezioni delle rette del fascio cade nell'arco $\widehat{AB}$: una soluzione accettabile;
- per $k = 2$: la retta del fascio è la retta s che interseca la circonferenza nel punto A e in un altro punto interno all'arco $\widehat{AB}$. Al punto A corrisponde la soluzione limite accettabile $x = 0°$. L'altro punto di intersezione si determina risolvendo il sistema $\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ Y = -2X + 2 \end{cases} \longrightarrow \left(\frac{3}{5}\ ;\ \frac{4}{5}\right)$; pertanto l'altra soluzione, ordinaria, è $x = arc\ sen\frac{4}{5}$ o, il che è lo stesso $x = arc\ tg\frac{4}{3} \simeq 53°7'48''$;
- per $2 < k < \sqrt{5}$: le due intersezioni delle rette del fascio con la circonferenza cadono internamente all'arco $\widehat{AB}$ e l'equazione ha dunque due soluzioni;
- per $k = \sqrt{5}$: la retta del fascio è la tangente t che ha in comune con la circonferenza il punto $T\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$: l'equazione ha quindi due soluzioni coincidenti accettabili $x_1 = x_2 = arc\ tg\frac{1}{2} \simeq 26°33'54''$;
- per $k > \sqrt{5}$: le rette del fascio sono esterne alla circonferenza e l'equazione non ha pertanto soluzioni.

Riassumendo, si ha una soluzione per $\frac{\sqrt{3}+2}{2} \leq k < 2$ e due soluzioni per $2 \leq k \leq \sqrt{5}$.

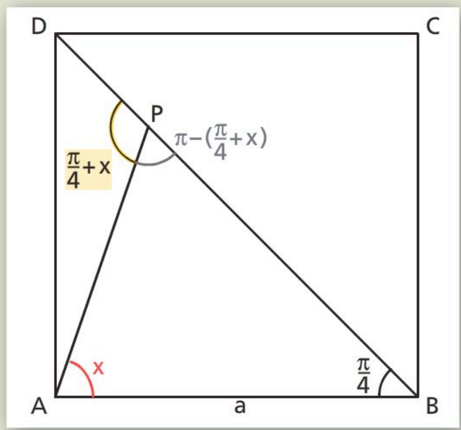
N.B. Il metodo grafico della circonfrenza goniometrica, esposto nel precedente esempio 1, è sempre applicabile a una qualsiasi equazione lineare parametrica in seno e coseno di uno stesso angolo. Esistono però anche altri metodi, grafici e non, con i quali è possibile discutere un'equazione goniometrica lineare (vedi esempi successivi).

ESERCIZIO GUIDA

Dato il quadrato $ABCD$ di lato $\overline{AB} = a$, sulla diagonale DB determiniamo un punto P tale che $\overline{AP}^2 + \overline{PD}^2 = ka^2$. Discutiamo il numero delle soluzioni al variare di k in $\mathbb{R}^+$.

Posto $P\widehat{A}B = x$, osservando la figura, otteniamo le limitazioni: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Applichiamo il teorema dei seni al triangolo APB,

$$\frac{\overline{AP}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\left[\pi - \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right]} \to \overline{AP} = \frac{a}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)},$$



e al triangolo APD,

$$\frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \frac{\overline{PD}}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \to \overline{PD} = \frac{a\cos x}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}.$$

Sostituendo nella relazione del problema, abbiamo

$$\frac{a^2}{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} + \frac{a^2\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = ka^2,$$

che, poiché per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ si ha $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \ne 0$, equivale a:

$$1 + 2\cos^2 x = 2k\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

Applicando le formule di bisezione e di addizione otteniamo:

$$1 + 2\frac{1 + \cos 2x}{2} = 2k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x\right)^2 \to 2 + \cos 2x = k(1 + \operatorname{sen} 2x).$$

Poiché $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, si ha $0 \le 2x \le \pi$ e quindi si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 2 + \cos 2x = k(1 + \operatorname{sen} 2x) \\ 0 \le 2x \le \pi \end{cases}$$

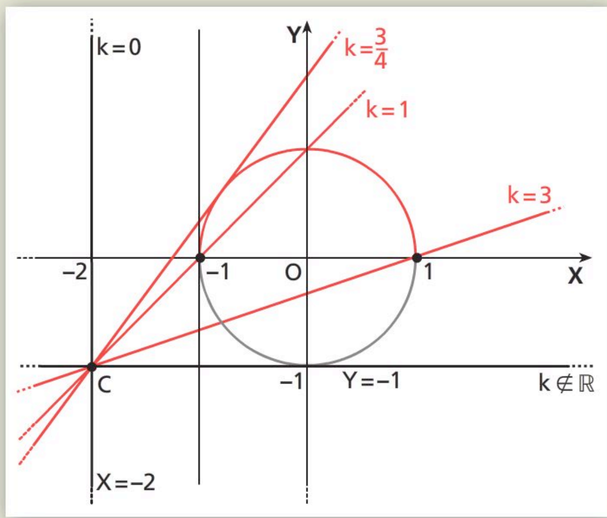
Poniamo $\cos 2x = X$, $\operatorname{sen} 2x = Y$. Con la relazione $\cos^2 2x + \operatorname{sen}^2 2x = 1$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} 2 + X = k(1 + Y) \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ -1 \le X \le 1 \wedge 0 \le Y \le 1 \end{cases}$$

Discutiamo il sistema graficamente. La prima equazione rappresenta un fascio di rette, la seconda una circonferenza. Il fascio di rette:

$$2 + X - k(1 + Y) = 0$$

ha centro $C(-2; -1)$ e le rette che danno i capisaldi sono:



• retta tangente alla circonferenza:

$$\frac{|2+0-k(1+0)|}{\sqrt{1+k^2}}=1 \quad \rightarrow \quad (2-k)^2=1+k^2 \quad \rightarrow \quad -4k+4=1 \quad \rightarrow \quad k=\frac{3}{4};$$

• retta passante per $(-1; 0)$: $\quad 2-1-k=0 \quad \rightarrow \quad k=1;$

• retta passante per $(1; 0)$: $\quad 2+1-k=0 \quad \rightarrow \quad k=3.$

Osservando la figura, concludiamo che si hanno:

2 soluzioni per $\frac{3}{4} \leq k \leq 1$, $\quad$ 1 soluzione per $1 < k \leq 3$.